OPERATOR SOLUSI MODEL FLUIDA TERMAMPATKAN TIPE KORTEWEG DENGAN KONDISI BATAS *SLIP* DI *HALF-SPACE*

KASUS KOEFISIEN , .

Suma Inna1, Irma Fauziah2, Muhammad Manaqib3, Priska Maya Putri4

Program Studi Matematika UIN Syarif Hidayatullah Jakarta,

Tangerang Selatan 15412, Indonesia

email : [suma.inna@uinjkt.ac.id1](mailto:suma.inna@uinjkt.ac.id1), [irma.fauziah@uinjkt.ac.id](mailto:irma.fauziah@uinjkt.ac.id)2 [muhammad.manaqib@uinjkt.ac.id](mailto:muhammad.manaqib@uinjkt.ac.id)3, [priska.maya17@mhs.uinjkt.ac.id](mailto:priska.maya17@mhs.uinjkt.ac.id3)4

Abstrak

Paper ini membahas model fluida termampatkan tipe Korteweg dengan kondisi batas slip di half space (. Model ini biasanya digunakan untuk mendeskripsikan aliran fluida dua fase di mana ada fase transisi pada antarmuka fase tersebut yang dikenal dengan efek kapiler. Untuk mangatasi efek kapiler tersebut, Korteweg mengembangkan model Navier Stokes dengan menambahkan unsur kapilaritas pada persamaan Navier Stokes. Pada paper ini ditunjukkan bahwa terdapat solusi pada model Navier Stokes tipe Korteweg untuk kasus koefisien dengan . Kasus koefisien ini muncul berdasarkan kodisi akar persamaan karakteristik dari model yang dibahas pada pada paper ini.

**Kata Kunci**: Fluida termampatkan, Model Resolvent, Tranformasi Fourier Parsial, Navier Stokes Korteweg,

Abstract

This paper discusses the Korteweg-type compressible fluid model with slip boundary conditions in a half-space (. This model is commonly used to describe two-phase fluid flow with a transitional phase at the interface between the phases known as the capillary effect. To address this effect, Korteweg developed a model by adding capillarity effect to the Navier-Stokes equation where the Navier Stokes equation is a model of a compressible fluid. The paper demonstrates that a solution exists for the Navier-Stokes of Korteweg type model in the case where the coefficient with

This coefficient case arises from the root conditions of the characteristic equation of the model.

**Keywords** : Compressible Fluid, Resolvent Problem, Partial Fourier Transform, Navier Stokes Korteweg

1. Pendahuluan

Segala jenis zat yang dapat mengalir dalam wujud gas maupun cair termasuk jenis fluida. Berdasarkan keterpampatannya, fluida dibagi menjadi dua, yaitu fluida yang dapat dimampatkan *(compressible fluid)* dan fluida yang tidak dapat dimampatkan *(incompressible fluid)*. Fluida termampatkan merupakan fluida yang densitas atau kerapatannya bisa berubah-ubah sehingga densitas meningkat jika menerima tekanan, dan menurun jika mengalami ekspansi. Contoh fluida gas seperti gas, O2, gas N2, dan lain-lain. Sedangkan fluida tidak dapat dimampatkan merupakan fluida yang jika terkena tekanan perubahan kerapatannya sangat kecil sehingga diabaikan dan dianggap densitasnya tidak dapat berubah. Contoh fluida cair seperti air, minyak, oli, dan lain-lain.

Model matematika yang mendiskripsikan aliran fluida termampatkan di antaranya model Navier-Stokes-Kortewege berikut.

(1)

dengan , , dengan adalah himpunan bilangan real, adalah himpunan bilangan riil yang lebih dari nol dan adalah ruang Euclid berdimensi , , dengan adalaha himpunan bilangan asli. Pada persamaan (1), adalah fungsi tak diketahui dan bernilai scalar ( : yang menyatakan kerapatan Fluida. Fungsi tak diketahui lainnya dari persamaan (1) adalah kecepatan fluida dinyatakan dinotasikan sebagai . Kemudian dengan konstanta densitas dan adalah tensor tegangan ganda di mana komponen ke -nya adalah ; dan adalah matriks identitas . Fungsi , dengan menyatakan konstanta kapiler dan pertama kali diperkenalkan oleh Korteweg pada tahun 1901. Fungsi ini ditambahkan pada model Navier Stokes dalam rangka memodelkan fluida termampatkan 2 fase (seperti gas dan zat cair) di mana terdapat fase trasnsisi yang dikenal dengan efek kapilaritas pada antarmuka dua fase tersebut.

Persamaan Navier-stokes-kortwege (NSK) secara umum digunakan untuk memodelkan aliran gas dan cairan yang melalui sebuah fase transisi. Sebagai contoh perubahan air menjadi gas yang disebabkan oleh suhu dan tekanan. Persamaan NSK ini merupakan pengembangan dari persamaan Navier-Stokes (NS) yang merupakan persamaan dasar untuk aliran fluida termampatkan seperti gas. Perbedaan mendasar dari kedua persamaan NSK dan NS adalah bahwa pada NSK dipertimbangkan tensor tegangan dengan konstanta kapilaritas yang disebut dengan konstanta kapiler. Secara umum, jika konstanta kapiler sama dengan 0, maka NSK sama dengan NS.

Fluida termampatkan tipe Korteweg telah dibahas oleh beberapa peneliti seperti pada [1-5]. Kotschote membuktikan adanya keunikan solusi lokal untuk model isotermal fluida [6]. Hirokazu Saito membahas model fluida termampatkan tipe Korteweg dengan kondisi batas bebas dan memperoleh operator solusi tunggal [7]. Kemudian, Hirokazu Saito juga membahas model fluida termampatkan tipe Korteweg dengan kondisi batas dan **u** = 0 dan memperoleh operator solusi [8].

Jika kita akan menyelesaikan persamaan (1) untuk sebarang koefisien dan , maka ada lima kondisi akar persamaan karakteristik yang harus dianalisis yaitu:

Kasus I: < 0;

Kasus II: > 0 dan ,

Kasus III: > 0 dan ,

Kasus IV: = 0 dan ,

Kasus V: = 0 dan , .

Suma Inna dkk membahas model fluida termampatkan tipe Korteweg dengan kondisi batas slip di half-space untuk kasus pertama dan kedua yaitu kasus koefisien 0, dan serta menunjukkan adanya solusi tunggal dari sistem tersebut [9]. Sementara paper ini fokus membahas model (1) untuk kasus yang ketiga yaitu kasus koefisien dengan .

1. **Metode Penyelesaian Sistem**

Secara umum, untuk menyelesaikan Persamaan tak linear (1) dengan sebuah syarat batas dilakukan dengan beberapa tahap yaitu melakukan linearisasi terhadap sistem tersebut. Sudah banyak penelitian yang membahas linearisasi sistem tersebut dengan menggunakan transformasi Hanzawa ataupun tranformasi Lagrange. Selanjutnyatnya dilakukan transformasi Laplace terhadap sistem tersebut untuk mengeliminasi variabel waktu t yang kemudian diperoleh sistem persamaan yang dikenal sebagai persamaan resolvent. Persamaan resolvent yang besesuaian dengan Persamaan (1) adalah sebagai berikut

(2)

Untuk menyelesaikan Persamaan (2) dengan sebuah syarat batas secara umum adalah menyelesaikan Persamaan (2) di whole space, kemudian di half space kemudian di bent half space. Paper ini membahas Persamaan (2) di half space dengan kondisi batas slip, yaitu persamaan berikut

dengan merupakan fungsi bernilai scalar. Suatu fungsi dikatakan bernilai scalar jika domain dari fungsi tersebut berupa vektor dan hasil atau range dari fungsi tersebut berupa skalar. Sebagai contoh dengan definisi . Sementara adalah fungsi bernilai vektor dan λ adalah parameter resolvent yang terdapat pada dengan adalah himpunan bilangan kompleksdan . Ruang dan untuk (**)** merupakan ruang yang didefinisikan sebagai berikut,

Untuk suatu fungsi skalar dan fungsi vkctor dan didefinisikan

Selanjutnya, untuk vektor berdimensi-N dan

.

Secara khusus untuk .

Beberapa notasi lain yang digunakan pada paper ini dijelaskan sebagai berikut. Misal dan menyatakan ruang Lebesque dan ruang Sobolev berturut-turut di , dan untuk , maka dan norma di dinotasikan dengan Misalkan and adalah ruang Banach, , , menyatakan perkalian sebanyak dan norma di ditulis secara lebih singkat Himpunan dari operator linear dari ke dinotasikan dengan dan himpunan dari operator linear dari ke dinotasikan denga Untuk suatu domain **,**  menyatakan himpunan fungsi holomorfik bernilai yang terdefinisi pada .

Untuk menyelesaikan Sistem (3), digunakan pendekatan solusi dari sistem di *whole-space* Sistem Persamaan di *whole-space* dinyatakan dalam persamaan berikut,

(4)

Untuk Sistem (4), Saito, pada [7], mendapatkan hasil sebagai berikut.

Didefinisikan ruang untuk fungsi ruas kanan sebagai berikut

Kemudian, definisikan dan sebagai berikut,

dan diperoleh teorema berikut.

**Teorema 1 (Saito [7]).** *Misalkan dan asumsikan bahwa dan adalah konstanta positif, maka untuk setiap terdapat operator dan dengan,*

*sehingga untuk setiap diperoleh operator solusi tunggal dari Sistem (4).*

1. **Hasil dan Pembahasan**

Bagian ini merupakan inti dari pembahasan paper ini yaitu membuktikan adanya solusi untuk Sistem (3).Definisikan ruang untuk fungsi ruas kanan Sistem (3), dengan , sebagai berikut,

Kemudian, definisikan dan sebagai berikut,

Tujuan utama dari paper ini adalah mencari operator solusi dari Sistem Persamaan (3) atau dengan kata lain adalah membuktikan teorema berikut.

**Teorema 2.** *Misalkan dan asumsikan bahwa dan adalah konstanta positif yang memenuhi untuk setiap terdapat operator dan dengan,*

*sehingga untuk setiap , adalah operator solusi untuk Persamaan* (3)*.*

Ada beberapa tahapan dalam membuktikan Teorema 2 yaitu; mereduksi Sistem tak homogen (3) menjadi sistem homogen. Tahapan berikutnya adalah menyelesaikan system homogen.

* 1. **Reduksi Sistem**

Misalkan dan , maka diperoleh sistem sebagai berikut,

dengan ,

dan

Selanjutnya, digunakan ekstensi genap dan ekstensi ganjil untuk membentuk sistem persamaan homogen. Untuk suatu fungsi) di , definisikan ekstensi genap dan ekstensi ganjil sebagai berikut,

dengan Kemudian definisikan ekstensi dari suatu fungsi vektor sebagai berikut,

(6)

Catatan bahwa dan

Misalkan, merupakan fungsi yang terdapat di ruang pada Sistem Persamaan (5) dan adalah operator solusi yang terdapat pada Teorema 1 di *whole-space* . Definisikan operator dan sebagai berikut,

(7)

Selanjutnya, definisikan dan sebagai

Kemudian V subscript j dan T subscript j merupakan komponen ke j dari dan berturut-turut, dengan j equals blank 1 comma blank midline horizontal ellipsis comma blank N minus 1. Dengan demikian diperoleh



Substitusi Persamaan (7) ke baris pertama Sistem (5) sehingga untuk baris pertama diperoleh sebagai berikut,

Selanjutnya substitusi Persamaan (7) ke baris kedua Sistem (5) sehingga diperoleh sebagai berikut,

dengan j equals blank 1 comma blank midline horizontal ellipsis comma blank N minus 1dan

Dengan demikian, dan juga merupakan operator solusi di *whole-space* . Oleh karena itu, berdasarkan ketunggalan solusi di *whole-space*,

(10)

Akibatnya, berdasarkan Persamaan (9) dan (10), diperoleh . Dengan demikian, ketika x subscript N equals 0, maka Error converting from MathML to accessible text.jika dan hanya jika Error converting from MathML to accessible text.Selanjutnya, misalkan rho dan didefinisikan sebagai berikut,

(11)

Substitusi Persamaan (11) ke Sistem (3), maka diperoleh sistem homogen sebagai berikut

dengan



Selanjutnya, untuk membuktikan Teorema 2 cukup dengan menyelesaikan Sistem Homogen (12) yang akan dibahas pada bagian berikut.

* 1. Penyelesaian Sistem Persamaan Homogen di *half-space*

Sistem Persamaan Homogen (12) secara sederhana dapat ditulis sebagai berikut,

dengan j equals blank 1 comma blank midline horizontal ellipsis comma blank N minus 1. Untuk membuktikan Teorema 2 cukup dengan membuktikan Teorema 3 berikut.

Untuk fungsi ruas kanan bold italic G equals left parenthesis g comma blank h subscript 1 comma blank midline horizontal ellipsis comma blank h subscript N minus 1 end subscript right parenthesispada Sistem (13), definisikan ruang

Error converting from MathML to accessible text.

Kemudian definiskan

Error converting from MathML to accessible text.

**Teorema 3.** *Misalkan dan asumsikan bahwa dan adalah konstanta positif yang memenuhi , maka untuk setiap terdapat operator dan dengan,*

*sehingga, untuk setiap , adalah operator solusi dari Persamaan* (13)*.*

***Bukti***

Sebelumnya diperkenalkan defisi dari transformasi Fourier parsial berikut. Diberikan fungsi terdefinisi pada maka transformasi Fourier parsial dan invers transformasi Fourier parsial dari dapat ditulis :

di mana  dan 

Misalkan div blank bold v equals psi with hat on top, lalu lakukan transformasi Fourier parsial ke Sistem Persamaan (13) sehingga diperoleh sistem persamaan diferensial biasa sebagai berikut,

(14)

(15)

(16)

dengan syarat batas sebagai berikut,

(17)

(18)

(19)

di mana,

(20)

Subtitusi Persamaan (14) ke Persamaan (15) dan (16) sehingga diperoleh

(21)

(22)

dan ke Persamaan (17) sehingga diperoleh,

(23)

Misakan didefiniskan sebagai berikut,

(24)

Dengan demikian diperoleh bentuk sistem persamaan diferensial biasa sebagai berikut,

, (25)

untuk (26)

dengan

Misalkan and adalah konstanta positif. Definisikan polynomial sebagai

Maka diperoleh akar dari

dengan dan . Misalkan , maka Persamaan (24) dapat ditulis

Misalkan , maka untuk

adalah akar dari Persamaan (24) dengan . Pada kasus koefisien untuk , diperoleh . Dengan demikian diperoleh akar karakteristik untuk untuk Persamaan (25) dan (26) adalah dan . Dengan demikian, solusi umum persamaan karakteristik dari Persamaan (25) dan (26) sebagai berikut,

(27)

(28)

Berdasarkan Persamaan (20) diperoleh,

(29)

(30)

(31)

dengan untuk .

Selanjutnya, substitusikan pada Persamaan (21) menjadi sebagai berikut,

Karena maka . Dengan demikian dari persamaan di atas diperoleh

(32)

Kemudian, subtitusikan terhadap Persamaan (22) sehingga diperoleh persamaan berikut,

Dengan menggunakan fakta bahwa maka diperoleh . Dengan demikian persamaan di atas menjadi

(33)

Berdasarkan Persamaan (32) dan (33), maka Persamaan (21) dan (22) dapat ditulis sebagai berikut,

= 0 (34)

= 0 (35)

Selanjutnya, substitusi Persamaan (27) dan (28) terhadap Persamaan (34) sebagai berikut,

. (36)

Subsitusi Persamaan (27) dan (28) terhadap Persamaan (35),

. (37)

Dengan demikian, berdasarkan hasil perhitungan Persamaan (36) dan (37) diperoleh,

(38)

(39)

Karena maka berdasarkan Persamaan (38) dan (39) deproleh koefisien,

(40)

. (41)

BerdasarkaPersamaan (40) dan (41) diperoleh

. (42)

Persamaan (42) dikali menghasilkan

(43)

Untuk mendapatkan nilai , substitusikan (43) terhadap (30) sehingga diperoleh sebagai berikut,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  | (44) |

karena maka Persamaan (28) dapat ditulis dalam bentuk lain yaitu,

(45)

dimana . Selanjutnya, substitusikan Persamaan (45) terhadap syarat batas pada Persamaan (19),

,

dan karena maka

Kemudian, turunkan pada Persamaan (45) terhadap sehingga menjadi sebagai berikut,

(46)

Ketika , Persamaan (46) menjadi sebagai berikut,

(47)

dengan . Kemudian, substitusikan Persamaan (47) terhadap syarat batas Persamaan (18) sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut

(50)

Selanjutnya, substitusikan Persamaan (42) ke Persamaan (50) sehingga diperoleh

yang berakibat

(51)

Kalikan Persamanan (51) dengan untuk mendapatkan

. (52)

Substitusi terhadap Persamaan (43), (52) dan substitusi terhadap Persamaan (29) sehingga diperoleh

(53)

Selanjutnya, substitusikan Persamaan (27) ke syarat batas pada Persamaan (23) untuk mendapatkan

sehingga

(54)

Kemudian, substitusikan Persamaan (53) dan (44) ke Persamaan (54) sehingga diperoleh

.

Akibatnya diperoleh

(55)

Selanjutnya, substitusikan koefisien pada Persamaan (55) terhadap Persamaan (42), (44), (51), (53) dimana dimisalkan dan sehingga diperoleh

(56)

(57)

(58)

(59)

Misalkan

(59a)

Perhatikan bahwa

di mana

Perhatikan bahwa , oleh karena itu berdasarkan (59a) diperoleh

Karena , maka diperoleh

Subtitusi koefisien dan pada Persamaan (56) dan (58) ke Persamaan (28) dan dengan menggunakan persamaan (59a) maka diperoleh,

(61)

dimana . Selanjutnya, substitusikan koefisien , dan pada Persamaan (55) ke Persamaan (28) diperoleh sebagai berikut,

(62)

Dengan demikian diperoleh solusi operator solusi dan dengan melakukan invers transfromasi Fourier parsial terhadap Persamaan (60), (61) dan (62) sehingga diperoleh,

(63)

**,**  (64)

(65)

Misalkan,

maka operator solusi dapat ditulis sebagai berikut,

Dengan demikian, diperoleh operator solusi

dari Sistem Persamaan Homogen (13) di *half-space* . Dengan demikian maka Teorema (3) terbukti.

* 1. **Bukti Teorema 2**

Perhatikan kembali Persamaaan(11), maka diperoleh operator solusi di *half-space* sebagai berikut,

dan

maka operator solusi sistem (3) dapat ditulis sebagai berikut

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa Sistem Persamaan (3), untuk kasus koefisien memiliki operator solusi di *half-space* . Dengan demikian, Teorema (2) Terbukti.

1. **Ucapan Terima Kasih**

Penelitian ini didanai oleh Pusat Penelitian dan Penerbitan (PUSLITPEN) UIN Syarif Hidayatullah Jakarta tahun fiskal 2022 nomor UN.01/KPA/223/2022.

1. Daftar Pustaka

[1] H. Freist¨uhler, M. Kotschote, *Phase-field and Korteweg-type models for the time-dependent flow of compressible two-phase fluids*, Arch. Ration. Mech. Anal. 224 (1) : 1–20, 2017.

[2] M. Kotschote. *Strong well-posedness for a Korteweg-type model for the dynamics of a compressible non-isothermal fluid*. J. Math. Fluid Mech., 12(4):473–484, 2010.

[3] M. Kotschote. Existence and time-asymptotics of global strong solutions to dynamic Korteweg models. Indiana Univ. Math. J., 63(1):21–51, 2014.

[4] B. Haspot. Existence of global weak solution for compressible fluid models of Korteweg type, J. Math. Fluid Mech. 13 (2) : 223–249, 2011.

[5] D. Bian, L. Yao, C. Zhu, Vanishing capillarity limit of the compressible fluid models of  
Korteweg type to the Navier-Stokes equations, SIAM J. Math. Anal. 46 (2) :1633–1650,  
2014.

1. M. Kotschote, *Strong Solutions For A Compressible Fluid Model Of Korteweg Type,* Mathematical Methods in the Applied Sciences. 44, 1744–1787, 2020.
2. H. Saito., *Compressible Fluid Model Of Korteweg Type With Free Boundary Condition* : Model Problem, [Funkcialaj Ekvacioj](https://tus.elsevierpure.com/ja/publications/compressible-fluid-model-of-korteweg-type-with-free-boundary-cond), Volume 62 Issue 3 Pages 337-386, 2019.
3. H. Saito, *Existence of Bounded Solution Operator Families For A Compressibble Fluid Model Of Korteweg Type On The Half Space,* Math Methods*.* Appl. 38, 1888–1925, 2015.

[9] S. Inna, H. Saito, and S. Maryani *Half-Space Model Problem for A Compressible Fluid Model of Korteweg Type Wtih Slip Boundary Condition,* Journal of Physics: Conference Series 1494, 2020.